Exame de 5 Janeiro de 2007 (Mét. Estatísticos)

Exercício 1

T – v.a. que representa o tempo de desenvolvimento do fungo, em dias, em laranjas mantidas à Temp. de 20°C num armazém

$T \sim \mathcal{N}ormal(\mu = 7 \text{ dias};\ \sigma^2 = 4 \text{ dias}^2)$

a) $T = -2$ (acontecimento impossível)

$T > 7$ e $T < 7$ (2 acont. equiprováveis)
ou $T > 8$ e $T < 6$

b) $P(T \geq 9) = P\left(Z \geq \frac{9-7}{2}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) =$

$= 1 - F(1) \underset{\text{Tab.4}}{=} 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Assim, $P(T \leq 9) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$

c)

Tempo de des. do fungo em 90% das laranjas

90% laranjas contaminadas

d

Cálculo do 90º percentil (mediana)

$P(T < d) = 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{d-7}{2}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow F\left(\underbrace{\frac{d-7}{2}}_{\text{positivo}}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{d-7}{2} \underset{\text{Tab.4}}{\simeq} 1{,}28 \Leftrightarrow d \simeq 9{,}56$ dias

Resposta: sensivelmente a metade do 9º dia, 90% das laranjas estarão contaminadas com o fungo

d) $\overline{T}$ – representa o tempo médio de desenvolvimento do fungo, em 10 laranjas seleccionadas aleatoriamente

Utilizando a propriedade da aditividade,

$$\left.\begin{array}{l} \overline{T} = \dfrac{T_1 + T_2 + \dots + T_{10}}{10} \\ \\ T_1, T_2, \dots, T_{10} \text{ são independentes} \end{array}\right\} \quad \overline{T} \sim \mathcal{N}ormal\left(\mu = 7;\ \sigma^2 = \frac{4}{10}\right)$$

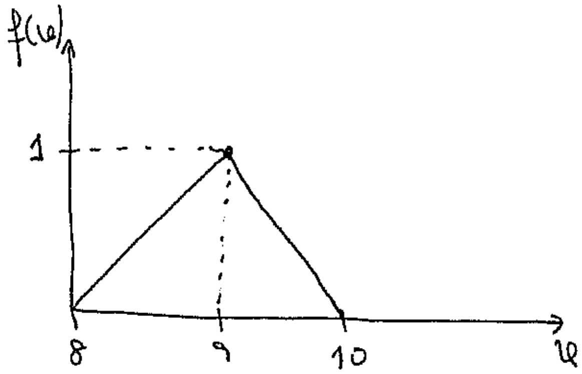
$P(6 < \overline{T} < 8) = P\left(\frac{6-7}{\sqrt{4/10}} < Z < \frac{8-7}{\sqrt{4/10}}\right) = P(-1{,}58 < Z < 1{,}58) = 2 \times P(0 < Z < 1{,}58) =$

$\underset{\text{Tab.3}}{=} 2 \times 0{,}4429 = 0{,}8858$

Exercício 2

$$f(u) = \begin{cases} u-8 & , 8 \leq u \leq 9 \\ 10-u & , 9 < u \leq 10 \\ 0 & , u \notin [8,10] \end{cases}$$

a)



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f(u)\, du = \int_8^9 (u^2 - 8u)\, du + \int_9^{10} (10u - u^2)\, du =$$

$$= \left(\frac{u^3}{3} - 8\frac{u^2}{2} \right|_8^9 + \left(10\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right|_9^{10} =$$

$$= -81 + 85{,}333 + 166{,}667 - 162 = 9 \text{ unidades (valor médio)}$$

Através do gráfico $f(u)$, $Med(X) = 9$ porque $P(X<9) = P(X>9) = 0{,}5$

O peso mais provável é de 9, pois é aquele que maior valor de $f(u)$ (máximo da função).

Assim $E(X) = Med(X) = Moda = 9$ unidades

b) $P(X < 8{,}1) = \int_8^{8{,}1} (u-8)\, du = \left(\frac{u^2}{2} - 8u \right|_8^{8{,}1} = 0{,}005$

Y – v.a. que representa o n.º artigos, em 50, que apresentam um tempo inferior a 9 unidades

$Y \sim$ Binomial $(n=50 ; p=0{,}005)$

$P(1 < Y < 3) = P(Y=2) = \binom{50}{2} \cdot 0{,}005^2 \cdot 0{,}995^{48} \simeq 0{,}0241$

ou $Y \sim B(50 ; 0{,}005) \approx$ Poisson $(\lambda = 0{,}25)$, porque $n>20$ e $p \leq 0{,}05$

$P(1<Y<3) = P(Y=2) = e^{-0{,}25} \cdot \frac{0{,}25^2}{2!} \simeq 0{,}0243$

A $B(50 ; 0{,}005) \not\approx$ Normal porque $n=50>20$ mas $n.p = 0{,}25 <$?

Exercício 3

a)

Classes	n_i	f_i	N_i	F_i	x_i'	$n_i \cdot x_i'$
[151 ; 159[	6	0,06	6	0,06	155	930
[159 ; 167[	19	0,19	25	0,25	163	3097
[167 ; 175[	44	0,44	69	0,69	171	7524
[175 ; 183[	28	0,28	97	0,97	179	5012
[183 ; 191]	3	0,03	100	1	187	561
Total	n = 100	1	—	—	—	17124

alínea b) (x_i' e $n_i \cdot x_i'$)

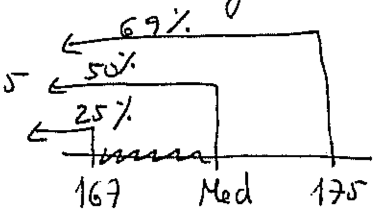
b) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} n_i \cdot x_i'}{100} = \dfrac{17124}{100} = 171{,}24$ gr

Interpretação: o peso médio de uma embalagem de margarina da marca "Culinex" é de 171,24 gr

$Q_{1/4} = 167$ gr porque na classe [159 ; 167[$F_i = 0{,}25$

Interpretação: 25% das embalagens de margarina desta marca tem um peso inferior ou igual a 167 gr

Med ∈ [167 ; 175[porque $F_i = 0{,}69 \geq 0{,}5$



amplitude da classe — correspondente dados

$175 - 167$ ——— $0{,}69 - 0{,}25$

$\text{Med} - 167$ ——— $0{,}5 - 0{,}25$

$\text{Med} - 167 = \dfrac{(175-167) \times (0{,}5 - 0{,}25)}{0{,}69 - 0{,}25} \Leftrightarrow \text{Med} - 167 \simeq 4{,}55 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{Med} \simeq 171{,}5$ gr

Interpretação: 50% das embalagens de margarina desta marca tem um peso inferior ou igual a 171,5 gr

c) probabilidade $= \dfrac{9{,}5 + 44 + 28 + 3}{100} = \dfrac{84{,}5}{100} = 0{,}845$ ou $Q_{0,155} = 163$

Resposta: 84.5% das embalagens apresentam um peso superior a 163 gr

Exercício 4

a) $\hat{e}_i = a + b \cdot P_i, \quad i = 1, \ldots, 12$

declive da recta: $b = \dfrac{cov(P,e)}{VAR(P)} = \dfrac{49,58}{114,41} \simeq 0,43$

c.A $\quad VAR(P) = \dfrac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i^2 - \overline{P}^2 = \dfrac{78975}{12} - \left(\dfrac{965}{12}\right)^2 \simeq 114,41$

$$cov(P,e) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} P_i \cdot e_i - \overline{P} \cdot \overline{e} = \frac{31475}{12} - \left(\frac{965}{12} \cdot \frac{384}{12}\right) \simeq 49,58$$

ordenada na origem: $\quad a = \overline{e} - b \cdot \overline{P} = \dfrac{384}{12} - 0,43 \times \dfrac{965}{12} \simeq -2,58$

Assim $\boxed{\hat{e}_i = -2,58 + 0,43 \cdot P_i \quad , i = 1, \ldots, 12}$

b) $\quad R_{P,e} = \dfrac{cov(P,e)}{\sqrt{VAR(P) \cdot VAR(e)}} = \dfrac{49,58}{\sqrt{114,41 \times 22,83}} \simeq 0,97$

c.A. $\quad VAR(e) = \dfrac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} e_i^2 - \overline{e}^2 = \dfrac{12562}{12} - \left(\dfrac{384}{12}\right)^2 \simeq 22,83$

Interpretação: O coeficiente de correlação linear é positivo, o que significa que à medida que o peso de rapazes obesos aumenta, o consumo de comida também aumenta.
O valor está muito próximo de 1, pelo que existe uma correlação forte entre estas duas variáveis.

Coeficiente de determinação: $R^2 \simeq 0,97^2 \simeq 0,9409$

Interpretação: 94,01 % da variabilidade existente no peso de rapazes obesos é explicada pelo consumo de comida.

4c) $H_0: \mu = 100$ contra $H_1: \mu = 90$ Teste unilateral esquerdo
$\alpha = 5\%$

• variável fulcral $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s_e/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

• cálculo da média amostral e variância amostral corrigida

$\bar{x} = \dfrac{965}{12} = 80{,}42$ Kg

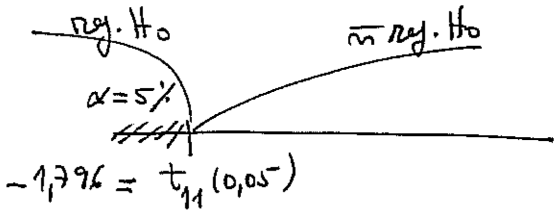
$s_e^2 = \dfrac{789{,}75}{11} - \dfrac{965^2}{12 \times 11} \simeq 124{,}81 \text{ Kg}^2$

ou $s_e^2 = \dfrac{n}{n-1} s^2 = \dfrac{12}{11} \times 114{,}41 \simeq 124{,}81 \text{ Kg}^2$

• supondo H_0 verdadeira, $t_{observ} = \dfrac{80{,}42 - 100}{\sqrt{124{,}81}/\sqrt{12}} \simeq -6{,}07$

• quantis da t-student com $n-1 = 12-1 = 11$ graus de liberdade

$t_{11}(0{,}05) = -t_{11}(0{,}95) = -1{,}796$
Tab.5

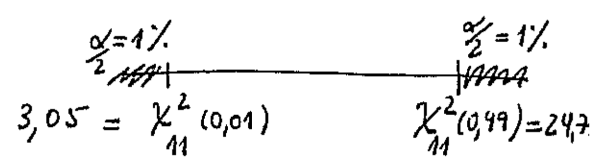


• Região de rejeição $\mathcal{R} = \left\{ x^{(12)} \in \mathbb{R}^{12} : \dfrac{\bar{X} - 100}{S_e/\sqrt{n}} < -1{,}796 \right\}$ para $\alpha = 5\%$

• Conclusão estatística ($\alpha = 5\%$): com base na amostra recolhida, como $t_{observ} \simeq -6{,}07 \in \mathcal{R}$, rejeita-se H_0 pelo que não existe evidência significativa de que o verdadeiro peso médio dos rapazes obesos seja igual a 100 Kg

b) variável fulcral: $\dfrac{(n-1)S_e^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$; grau confiança $= 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 2\%$

Construção do I.C. para σ^2 a 95%



$P\left(3{,}05 \leq \dfrac{11 \times 124{,}81}{\sigma^2} \leq 24{,}73\right) = 0{,}98 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{1}{24{,}73} \leq \dfrac{\sigma^2}{11 \times 124{,}81} \leq \dfrac{1}{3{,}05}\right) = 0{,}98 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{11 \times 124{,}81}{24{,}73} \leq \sigma^2 \leq \dfrac{11 \times 124{,}81}{3{,}05}\right) = 0{,}98$

$\Leftrightarrow P\left(55{,}52 \leq \sigma^2 \leq 450{,}13\right) = 0{,}98$

Assim $\sigma^2 \in [55{,}52 \,;\, 450{,}13]$ a 98%