2ª frequência de Métodos Estatísticos (21 Dezembro 2006)

Exercício 1 Q_A -

Q_A e Q_B - v.a. que representam a quantidade de uma bebida servida num copo pela máquina A e B, respectivamente

$Q_A \sim N(\mu = 150 \text{ ml}, \sigma^2 = 25 \text{ ml}^2) \rightarrow Z = \frac{Q_A - 150}{5} \sim N(0,1)$

$Q_B \sim N(\mu = 125 \text{ ml}; \sigma^2 = 20^2 \text{ ml}^2) \rightarrow Z = \frac{Q_B - 125}{20} \sim N(0,1)$

a) Acont. impossível:
$Q_A = 150$ ml, ou seja, a quantidade de uma bebida servida num copo pela máquina A ser exactamente de 150 ml (porque numa dist. contínua a prob. de uma v.a. assumir um valor pontual é de zero)

Dois acont. equiprováveis: $Q_A > 150$ ml e $Q_A < 150$ ml, ou seja, a quantidade de uma bebida num copo servida pela máquina A ser superior a 150ml ou inferior a 150ml (porque $Med_A = 150 \text{ ml} = \mu$, logo $P(Q_A > 150) = P(Q_A < 150) = 0,5$)

b) $P(Q_A < 145) = P\left(Z < \frac{145-150}{5}\right) = P(Z < -1) = F(-1) =$

$= 1 - F(1) \underset{\text{Tab. 4}}{\approx} 1 - 0,8413 = 0,1587$

c) É necessário definir uma nova variável aleatória!
Utilizando a prop. da aditividade entre duas normais e porque as duas bebidas são independentes uma da outra,

$Y = Q_A + Q_B \sim$ Normal$(\mu = 150 + 125 = 275 ; \sigma^2 = 25 + 20^2 = 425)$

Assim, $P(270 < Y < 280) = P\left(\frac{270 - 275}{\sqrt{425}} < Z < \frac{280 - 275}{\sqrt{425}}\right) =$

$= P(-0,24 < Z < 0,24) = 2 \times P(0 < Z < 0,24) \underset{\text{Tab. 3}}{\approx} 2 \times 0,0948 = 0,1896$

d) 55% | 45%

valor

$P(Q_B < \text{valor}) = 0{,}55 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{\text{valor} - 125}{20}\right) = 0{,}55 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F\Big(\underbrace{\frac{\text{valor} - 125}{20}}_{z \text{ positivo}}\Big) = 0{,}55 \underset{\text{Tab. 4}}{\Leftrightarrow} \frac{\text{valor} - 125}{20} \simeq 0{,}13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ valor = 127,6 ml (maior que mediana = 125 ml)

A Tendência não central calculada foi o 55º percentil.

Interpretação: 55% das bebidas servidas pela máquina B Têm um volume máximo de 127,6 ml

e) N – nº bebidas servidas pela máq. B, em 1000 bebidas encomendadas, que Transbordam

probabilidade de sucesso da Binomial:

$p = P(\text{copo Transbordar}) = P(Q_B > 170) = P\left(Z > \frac{170 - 125}{120}\right) =$

$= P(Z > 2{,}25) = 1 - P(Z \leq 2{,}25) = 1 - F(2{,}25) \underset{\text{Tab. 4}}{\simeq} 1 - 0{,}9878 = 0{,}012$

Assim $N \sim \text{Binomial}(n = 1000 ; p = 0{,}0122)$

$E(N) = n \times p = 1000 \times 0{,}0122 \simeq 12{,}2$ bebidas

Espera-se que 12 bebidas, das 1000, Transbordem em copos de 170 ml.

Exercício 2

P(envolver a morte de alguns dos ocupantes do veículo) $= \frac{4}{100} = 0{,}04$
$n = 200$ acidentes

X - v.a. que representa o n.º de acidentes, em 200, que envolvem a morte de alguns dos ocupantes

$X \sim$ Binomial $(n = 200 \ ; \ p = 0{,}04)$ Não está Tabelada

Pretende-se calcular a $P(X \geq 2)$

1.ª resolução (utilizando a própria dist. Binomial)

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - f(0) - f(1) =$

$\simeq 1 - 0{,}000284 - 0{,}00237 = 0{,}99735$

2.ª resolução (utilizando a aproximação da Binomial à Poisson)

$$\text{Binomial}\,(n = 200 \ ; \ p = 0{,}04) \underset{\substack{\Uparrow \\ n > 20 \text{ e } p \leq 0{,}05}}{\approx} \text{Poisson}\,(8) \quad \text{Está Tabelada}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - f(0) - f(1) \underset{\text{Tab 2}}{=} 1 - 0{,}0003 - 0{,}0029 = 0{,}9968$$

3.ª resolução (utilizando a aproximação da Binomial à Normal)

$$X \sim \text{Binomial}\,(200 \ ; \ 0{,}04) \underset{\substack{\Uparrow \\ n > 20 \text{ e } n.p > 7}}{\approx} Y \sim \text{Normal}\left(\begin{array}{l}\mu = n \times p = 200 \times 0{,}04 = 8 \\ \sigma^2 = n.p.(1-p) = 7{,}68\end{array}\right)$$

É necessário efectuar a correcção de continuidade (c.c.) porque a Binomial é uma dist. discreta e a Normal uma dist. contínua

$$P(X \geq 2) \underset{\text{c.c.}}{\approx} P(Y \geq 1{,}5) = P\left(Z \geq \frac{1{,}5 - 8}{\sqrt{7{,}68}}\right) = P(Z \geq -2{,}34) =$$

$$= 1 - P(Z < -2{,}34) = 1 - F(-2{,}34) = \cancel{1} - \cancel{1} + F(2{,}34) \underset{\text{Tab. 4}}{=} 0{,}9904$$

Exercício 3   X - v.a. que representa a percentagem diária de placas defeituosas produzidas

a) Para $2 \le u < 5$, $F(u) = F(2) + \int_2^u f(t)\,dt =$

$$= \frac{1}{40}(6-2) + \int_2^u \frac{1}{40}(t^2-1)\,dt = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_2^u =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{40}\left(\frac{u^3}{3} - u - \frac{2^3}{3} + 2\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{40}\left(\frac{u^3}{3} - u - \frac{8}{3} + \frac{6}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{40}\left(\frac{u^3}{3} - u - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{10_{(6)}} + \frac{u^3}{120} - \frac{1}{40}u - \frac{1}{60} = \frac{u^3}{120} - \frac{u}{40} + \frac{5}{60}$$

Assim $F(u) = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ \frac{1}{40}\left(3u - \frac{u^2}{2}\right) & , 0 \le u < 2 \\ \frac{u^3}{120} - \frac{u}{40} + \frac{5}{60} & , 2 \le u < 5 \\ 1 & , u \ge 5 \end{cases}$

b) Y - nº dias, em 10, em que existe menos de 2% de placas defeituosas produzidas

$Y \sim$ Binomial $(n = 10 ;\ p = 0{,}1)$

prob. sucesso $= P(X < 2) = F(2) = \frac{1}{40}(6-2) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Assim $P(Y = 2) = \binom{10}{2} \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^8 \simeq 0{,}19371$

Exercício 4

Amostra provém de uma pop. Normal
$n = 30$ morangos
$\bar{x} = 11$ unidades
$s = 3,5$ unidades

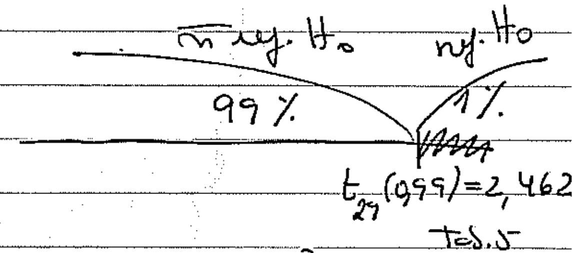
a) $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu > 10$ Teste unilateral direito
$\alpha = 1\%$

• variável fulcral $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s_c/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

• cálculo da variância amostral corrigida

$$s_c^2 = \frac{n}{n-1} s^2 \quad \frac{30}{29} \times 3,5^2 \simeq 12,672$$

• Supondo H_0 verd, $t_{observ} = \dfrac{11 - 10}{\sqrt{12,672}/\sqrt{30}} \simeq 1,54$

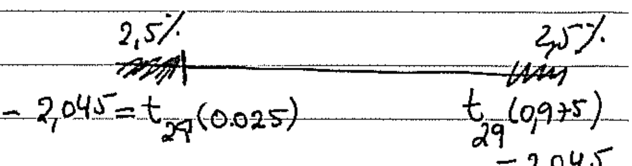


• quantil da t-student
de $n-1 = 31-1 = 30$ graus de liberdade

• Região de rejeição $\Omega = \left\{ x^{(30)} \in \mathbb{R}^{30} : \dfrac{\bar{X} - 10}{s_c/\sqrt{n}} > 2,462 \right\}$ para $\alpha = 1\%$

• Conclusão ($\alpha = 1\%$): Como $t_{observ} \simeq 1,54 \notin \Omega$, não se rejeita H_0 pelo que os limites de contaminação pelo pesticida estão em conformidade com os limites designados pela D.G.P.C

b) $H_0: \mu = 10$ contra $H_1: \mu \neq 10$ (Teste bilateral) $1-\alpha = 95\%$
Nota: a variável fulcral manteve-se
Construção do I.C. para μ a 95%.



$$P\left(-2,045 \leq \frac{11 - \mu}{\sqrt{12,672}/\sqrt{30}} \leq 2,045\right) = 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(-1,329 \leq 11 - \mu \leq 1,329) = 0,95 \Leftrightarrow P(-12,329 \leq -\mu \leq -9,671) = 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(9,671 \leq \mu \leq 12,329) = 0,95 \Rightarrow \mu \in [9,671 ; 12,329] \text{ a } 95\%$$